# Série 3

**Solution 7.** 1. Noter que $E_0 = \cup_{i=1}^3 E_i$.

a) $P(E_0) = \sum_{i=1}^3 P(E_i) = 3/4$.

b) $P(E_0) = P(\cup_{i=1}^3 E_i) = P((\cap_{i=1}^3 E_i^c)^c) = 1 - \Pi_{i=1}^3(1-P(E_i)) = 1-(3/4)^3 = 37/64$. On a utilisé le fait que les événements complémentaires d'événements indépendants sont aussi indépendants (preuve ?).

c) $P(E_0) = P(E_1) = 1/4$.

2. a) A l'aide d'un diagramme de Venn, on visualise facilement que $P(E_0)$ est maximisée lorsque les événements sont disjoints. Donc $P(E_0) = 3/4$.

b) $P(E_0) = \sum_{i=1}^3 P(E_i) - \sum_{i<j} P(E_i)P(E_j) + P(\cap_{i=1}^3 E_i) = 3/4 - 3/16 + P(\cap_{i=1}^3 E_i)$. Or $P(\cap_{i=1}^3 E_i) \leq \min_{i<j} P(E_i \cap E_j) = 1/16$, donc $P(E_0) \leq 5/8$.

3. D'après 2.b), $P(E_0) \leq 3p - 2p^2$. Mais $P(E_0) = 1$ donc $p \geq 1/2$.

**Solution 8.** 1. Les 5 lettres du mot "vélos" étant différentes, il y a $5! = 120$ manières de les arranger.

2. Sur les 6 lettres du mot "papier", il y a deux $p$. Choisissons tout d'abord leurs positions, nous avons $\binom{6}{2}$ manière de le faire. Puis, il y a 4! manières de placer les autres lettres qui sont distinctes. Finalement, nous avons par le principe de multiplication, $\binom{6}{2} \cdot 4! = \frac{6!}{2!} = 360$ arrangements possibles.

3. Nous allons tout d'abord choisir les positions des $n$, puis des $a$ et ensuite des autres lettres distinctes. Le principe de multiplication donne $\binom{6}{2}\binom{4}{2} \cdot 2! = \frac{6!}{2!2!} = 180$ arrangements possibles.

4. Choisissons les positions des trois $m$, puis des deux $i$ et finalement des autres lettres distinctes. Nous avons donc $\binom{7}{3}\binom{4}{2} \cdot 2! = \frac{7!}{3!2!} = 420$ arrangements possibles.

**Solution 9.** Le nombre d'étudiants de la classe à former n'est pas fixé.

a) <u>Première manière</u> : Si nous devons constituer une classe de $k$ étudiants, nous avons $\binom{n}{k}$ façons de les choisir. Il y a ensuite $k$ façons de choisir le délégué de classe. En sommant de $k = 1$ à $n$, nous obtenons $\sum_{k=1}^n k\binom{n}{k}$ classes possibles.

<u>Seconde manière</u> : Nous pouvons tout d'abord choisir un délégué ($n$ choix), puis choisir pour chacun des $n-1$ étudiants restants, s'il intègre la classe ou non ($2^{n-1}$ choix). Ceci nous donne finalement $n2^{n-1}$ équipes possibles.

b) — $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$ nous avons $\binom{n}{r}$ façons de choisir $r$ étudiants à partir d'un groupe de $n$. Cela revient à choisir les $(n-r)$ étudiants à éliminer à partir du même groupe.

— Identité de Vandermonde $\displaystyle\binom{m+n}{r} = \sum_{j=0}^{r}\binom{m}{j}\binom{n}{r-j}$.

Soit $E$ et $F$ deux ensembles disjoints de cardinalité respective $m$ et $n$, et $G = E \cup F$ leur union. Il y a $\binom{m+n}{r}$ façons de choisir à $r$ éléments dans $G$ (dont le cardinal est $m+n$).

Parmi ces groupes à $r$ éléments on cherche à savoir combien il y en a qui contiennent exactement $j$ éléments dans $E$. Une fois choisis, il reste $r-j$ éléments à choisir dans $F$. Au total il y a $\binom{m}{j}\binom{n}{r-j}$ façons de choisir $r$ éléments dont $j$ sont dans $E$. En sommant de $j = 1$ à $r$, nous obtenons $\sum_{j=0}^r \binom{m}{j}\binom{n}{r-j}$ possibilités.

— $\binom{n+1}{r} = \binom{n}{r} + \binom{n-1}{r}$. Cas particulier de l'identité de Vandermonde en choisissant l'ensemble $E$ de cardinal 1.

**Solution 10.** Soit $A$ l'évenement "vous répondez correctement à la question". Soit $B$ l'événement que "vous connaissez la réponse à la question". On veut calculer $P(A)$. Or, par définition de la probabilité conditionnelle,

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c) = P(A|B)P(B) + P(A|B^c)P(B^c) = 1 \cdot 3/4 + 1/5 \cdot 1/4 = 4/5\,.$$

**Solution 11.** Soit $B_i$ l'événement "une boule bleue est tirée au $i^{\text{ème}}$ tirage" ($i \in \{1,2,3\}$). On définit $R_i$ similairement. On a

$$P(B_1 \cap R_2 \cap B_3) = P(B_3|R_2 \cap B_1)P(R_2|B_1)P(B_1) = \left(\tfrac{b-1}{r+b-2}\right)\left(\tfrac{r}{r+b-1}\right)\left(\tfrac{b}{r+b}\right)\,.$$

**Solution 12.** Recall that we hope to win the nice goat, not a nasty polluting car. Define the events $G_j$, $C_j$ and $D_j$, corresponding to 'the goat is behind door $j$', 'I choose door $j$', and 'the host opens door $j$', for $j = 1, 2, 3$. The labels $j = 1, 2, 3$ could be attributed to the doors after I and the host have made our choices, so let us suppose that the label for my choice is always 1, and that for the host's choice is always 2. The probability that I chose the right door initially, and therefore should not switch, is $\Pr(G_1 \mid C_1, D_2)$. Bayes' theorem gives

$$\Pr(G_1 \mid C_1, D_2) = \frac{\Pr(D_2 \mid G_1, C_1)\Pr(C_1 \mid G_1)\Pr(G_1)}{\sum_{j=1}^{3} \Pr(D_2 \mid G_j, C_1)\Pr(C_1 \mid G_j)\Pr(G_j)},$$

since the only uncertainty is over where the goat is. Now $\Pr(G_j) = 1/3$, and $\Pr(C_1 \mid G_j) = 1/3$ (I choose a door at random with respect to the goat), so after simplification,

$$\Pr(G_1 \mid C_1, D_2) = \frac{\Pr(D_2 \mid G_1, C_1)}{\sum_{j=1}^{3} \Pr(D_2 \mid G_j, C_1)} = \frac{p}{p+0+1},$$

where $\Pr(D_2 \mid G_1, C_1) = p$, $\Pr(D_2 \mid G_2, C_1) = 0$ and $\Pr(D_2 \mid G_3, C_1) = 1$, since the host always opens a door with a car behind it. Here $p$ is the probability that the host opens door 2, when he has a choice of doors to open. Thus the probability that the goat is behind my chosen door is

$$\Pr(G_1 \mid C_1, D_2) = \frac{p}{1+p} \in [0, 1/2];$$

this equals 1/3 if $p = 1/2$.

The probability that the goat is behind the unopened door (Door 3) is therefore

$$\Pr(G_3 \mid C_1, D_2) = 1 - \Pr(G_1 \mid C_1, D_2) = 1/(1+p) \in [1/2, 1].$$

Thus it is always advantageous for me to switch, even if I don't know $p$, since my probability of winning if I switch is at least 1/2, whereas it is at most 1/2 if I do not switch. If the host chooses at random, i.e., if $p = 1/2$, then my probability of winning doubles from 1/3 to 2/3 if I switch.